



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A**

SUBIECTUL I

a) Demonstrați că există o matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, astfel încât matricele $A, A^2, A^3, \dots, A^{2018}$ să fie distincte două câte două, iar $G = \{A, A^2, A^3, \dots, A^{2018}\}$ să fie grup în raport cu înmulțirea matricelor.

b) Arătați că grupul (G, \cdot) construit la a) este izomorf cu grupul aditiv \mathbb{Z}_{2018} al claselor de resturi modulo 2018.

Rezolvare și barem:

a) Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{2018} & -\sin \frac{2\pi}{2018} \\ \sin \frac{2\pi}{2018} & \cos \frac{2\pi}{2018} \end{pmatrix}$. Avem

$$A^{2018} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = I_2. \dots\dots\dots (1 \text{ p})$$

Matricele $A, A^2, A^3, \dots, A^{2018}$ sunt distincte două câte două ca și în cazul numerelor complexe

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{2018} + i \sin \frac{2k\pi}{2018}, k \in \{1, 2, 3, \dots, 2018\},$$

(1 p)

care sunt rădăcinile de ordinul 2018 ale unității.

Avem $G = \{I_2, A, A^2, \dots, A^{2017}\}$ cu $I_2 = A^0$.

Înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe G , întrucât, pentru numărul întreg $k + l$, unde $k, l \in \{0, 1, \dots, 2017\}$, există $q \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 2018$, astfel încât $k + l = 2018q + r$ și

$$A^k \cdot A^l = (A^{2018})^q \cdot A^r = A^r \in G. \quad (1 \text{ p})$$

Înmulțirea matricelor este asociativă pe $G \subset M_2(\mathbb{R})$, întrucât este asociativă pe $M_2(\mathbb{R})$ și $I_2 \in G$ este elementul neutru.

Orice element $A^k \in G, k \in \{0, 1, \dots, 2017\}$ este simetrizabil în raport cu înmulțirea matricelor, simetricul său fiind A^{2018-k} întrucât $A^k \cdot A^{2018-k} = A^{2018} = I_2$.

În concluzie G este grup în raport cu înmulțirea matricelor. **(1 p)**



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

b) Considerăm funcția $f: \mathbb{Z}_{2018} \rightarrow G, f(\hat{r}) = A^r$. Funcția f este bine definită deoarece din $\hat{r} = \hat{r}_1$ rezultă $r - r_1$ divizibil cu 2018, deci există $q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $r - r_1 = 2018q$ și atunci avem $A^{r-r_1} = (A^{2018})^q = I_2$, de unde $A^r = A^{r_1}$ **(1 p)**

Deoarece $f(\hat{r} + \hat{s}) = f(\hat{r+s}) = A^{r+s} = A^r \cdot A^s = f(\hat{r}) \cdot f(\hat{s}), \forall \hat{r}, \hat{s} \in \mathbb{Z}_{2018}$, rezultă că f este morfism de grupuri.

(1 p)

Funcția f este evident surjectivă și întrucât $f(\hat{r}) = f(\hat{s}) \Rightarrow A^r = A^s \Rightarrow A^{r-s} = I_2 \Rightarrow r-s$ divizibil cu 2018 $\Rightarrow \hat{r} = \hat{s}$, pentru orice $\hat{r}, \hat{s} \in \mathbb{Z}_{2018}$, obținem că f este și injectivă. În concluzie f este izomorfism de grupuri și deci grupul (G, \cdot) este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}_{2018}, +)$. **(1 p)**



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL 2

Pe mulțimea $K = (-17, +\infty)$ considerăm legea de compoziție $x \oplus y = (x+17)(y+17) - 17$.

- a) Arătați că perechea (K, \oplus) este grup comutativ izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.
- b) Construiți pe mulțimea K o lege de compoziție „ \otimes ”, astfel încât (K, \oplus, \otimes) să fie corp comutativ izomorf cu corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Rezolvare și barem:

a) Cum $(x \oplus y) \oplus z = (x+17)(y+17)(z+17) - 17 = x \oplus (y \oplus z), \forall x, y, z \in K$, obținem că legea „ \oplus ” este asociativă. Cum $x \oplus y = (x+17)(y+17) - 17 = y \oplus x, \forall x, y \in K$, obținem că legea „ \oplus ” este și comutativă.

(1 p)

Din $x \oplus \theta_1 = x, \forall x \in K$ obținem $(x+17)(\theta_1+17) = 0, \forall x \in K$, de unde, rezultă că $\theta_1 = -16 \in K$, este element neutru în raport cu legea „ \oplus ”. Din $x \oplus x' = -16, x \in K$, obținem că $x' = \frac{1}{x+17} - 17, x' \in K$, este simetricul lui x în raport cu „ \oplus ”. Deci orice $x \in K$ este simetrizabil în raport cu legea „ \oplus ”. În concluzie (K, \oplus) este grup comutativ.

(1 p)

Considerăm funcțiile bijective $f: K \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = x+17, g: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln x$ și $h: K \rightarrow \mathbb{R}, h = g \circ f$, deci $h(x) = \ln(x+17)$. Întrucât $h(x \oplus y) = \ln(x \oplus y + 17) = \ln(x+17) + \ln(y+17) = h(x) + h(y), \forall x, y \in K$, obținem că grupul (K, \oplus) este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$.

(1 p)

b) Din condiția de morfism $h(x \otimes y) = h(x) \cdot h(y), \forall x, y \in K$, găsim $\ln(x \otimes y + 17) = \ln(x+17) \cdot \ln(y+17)$, de unde $x \otimes y = (x+17)^{\ln(y+17)} - 17, \forall x, y \in K$.

(1 p)

Cum $(x \otimes y) \otimes z = (x+17)^{\ln(y+17) \cdot \ln(z+17)} - 17 = x \otimes (y \otimes z), \forall x, y, z \in K$ obținem că legea „ \otimes ” este asociativă. Cum $\ln(x \otimes y + 17) = \ln(x+17) \ln(y+17) = \ln(y \otimes x + 17), \forall x, y \in K$ rezultă că legea



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

„ \otimes ” este comutativă.

(1 p)

Din $x \otimes \theta_2 = x, \forall x \in K$ obținem $(x+17)^{\ln(\theta_2+17)-1} = 1, \forall x \in K$, de unde rezultă că

$\theta_2 = e - 17 \in K$, este element neutru în raport cu legea „ \otimes ”.

Din $x \otimes (y \oplus z) = (x+17)^{\ln(y+17)(z+17)} - 17 = (x+17)^{\ln(y+17)} \cdot (x+17)^{\ln(z+17)} - 17 =$

$(x \otimes y) \oplus (x \otimes z), \forall x, y, z \in K$, deducem că „ \otimes ” este distributivă față de „ \oplus ”.

(1 p)

Pentru $x \in K \setminus \{-16\}$, din $x \otimes x' = e - 17$, obținem că $x' = e^{\frac{1}{\ln(x+17)}} - 17, x' \in K$, este simetricul

lui x în raport cu legea „ \otimes ”. Deci orice $x \in K \setminus \{-16\}$, este simetrizabil în raport cu legea „

\otimes ”.

În concluzie (K, \oplus, \otimes) este corp comutativ izomorf cu corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(1 p)



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL 3

Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ și funcțiile $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. Să se arate că există $c \in (a, b)$ astfel încât $\int_a^c f(x)dx = \int_c^b g(x)dx$.

Gheorghe Stoica-G.M. 12/2017

Rezolvare și barem:

Considerăm funcția $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, H(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_x^b g(t)dt$.

(1 p)

Deoarece f și g sunt continue funcția H este continuă.

(1 p)

Avem $H(a) \cdot H(b) = -\left(\int_a^b g(t)dt\right) \cdot \left(\int_a^b f(t)dt\right)$.

(1 p)

Cum $f(t) > 0, \forall t \in [a, b]$ și $g(t) > 0, \forall t \in [a, b]$ obținem $\int_a^b f(t)dt > 0$ și $\int_a^b g(t)dt > 0$.

(1 p)

Deci $H(a) \cdot H(b) < 0$.

(1 p)

Din H continuă pe $[a, b]$ și $H(a) \cdot H(b) < 0$ rezultă că există $c \in (a, b)$, astfel încât $H(c) = 0$.

(1 p)

În concluzie există $c \in (a, b)$, astfel încât $\int_a^c f(t)dt - \int_c^b g(t)dt = 0$,
adică astfel încât

$$\int_a^c f(x)dx = \int_c^b g(x)dx$$

(1 p)

Observație. H este derivabilă și $H'(x) = f(x) + g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$. Deci H este strict crescătoare și atunci punctul c (a cărei existență am demonstrat-o) este unic.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL 4

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k+5)}$.

a) Arătați că $a_n = \frac{2}{5} \int_0^1 (1-x^5) \left(\sum_{k=1}^n x^{2k-1} \right) dx$; b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Rezolvare și barem:

$$\text{a) } a_n = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k(2k+5)} = \frac{2}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+5} \right). \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Deci } a_n = \frac{2}{5} \sum_{k=1}^n \int_0^1 (x^{2k-1} - x^{2k+4}) dx = \frac{2}{5} \int_0^1 \sum_{k=1}^n x^{2k-1} (1-x^5) dx = \frac{2}{5} \int_0^1 (1-x^5) \left(\sum_{k=1}^n x^{2k-1} \right) dx. \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{b) } a_n = \frac{2}{5} \int_0^1 x(1-x^5) \left(1+x^2+\dots+(x^2)^{n-1} \right) dx = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{x(1+x+x^2+x^3+x^4)(1-x^{2n})}{1+x} dx. \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Rezultă } a_n = \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x+1} dx - \frac{2}{5} \int_0^1 \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x}{x+1} \cdot x^{2n} dx.$$

$$\text{Deci } a_n = \frac{2}{5} \int_0^1 \left(x^4+x^2+1-\frac{1}{x+1} \right) dx - \frac{2}{5} \int_0^1 \left(x^4+x^2+1-\frac{1}{x+1} \right) \cdot x^{2n} dx. \quad (1 \text{ p})$$

Cum $0 \leq \left(x^4+x^2+1-\frac{1}{x+1} \right) \cdot x^{2n} \leq 3x^{2n}$, pentru orice $x \in [0,1]$, obținem

$$0 \leq \int_0^1 \left(x^4+x^2+1-\frac{1}{x+1} \right) \cdot x^{2n} dx \leq \int_0^1 3x^{2n} dx = \frac{3}{2n+1}. \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Rezultă că } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \left(x^4+x^2+1-\frac{1}{x+1} \right) \cdot x^{2n} dx \right] = 0. \quad (1 \text{ p})$$

$$\text{Deci } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{5} \int_0^1 \left(x^4+x^2+1-\frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1 - \ln 2 \right) = \frac{46-30\ln 2}{75}. \quad (1 \text{ p})$$